ПЛАН УЧЕБНОГО ЗАНЯТИЯ

по дисциплине «Математика»

дата 13.12.2023

Краткая историческая справка

История возникновения комплексных чисел была самой сложной среди других видов чисел. Первое их упоминание в истории, можно отнести к 50 веку до нашей эры. Тогда студент Герон из Александрии, пытаясь вычислить объем пирамиды столкнулся с тем, что должен был взять квадратный корень из разности 81-144. Но тогда он посчитал это невозможным и очень быстро сдался.

«Звездный час» комплексных чисел настал в 1545 году, когда итальянский математик Джироламо Кордано предложил создать новый вид чисел. Он предположил, что система уравнений, не имеющая решений в области действительных чисел, вполне может иметь решением числа новой природы. Только нужно было условиться как всем действовать над такими числами.

А название “*мнимые числа*” ввел в 1637 году французский математик и философ Р. Декарт.

В 1777 году один из крупнейших математиков XVIII века - Л. Эйлер предложил использовать первую букву французского слова *imaginaire* (мнимый) для обозначения числа $\sqrt{-1}$ (мнимой единицы), то есть $i^2=-1$.

Этот символ вошел во всеобщее употребление благодаря К. Гауссу. Термин “*комплексные числа*” так же был введен Гауссом в 1831 году.

Слово комплекс (от латинского *complexus*) означает связь, сочетание,совокупность понятий, предметов, явлений и т. д. образующих единое целое.

Таким образом, комплексное число задается двумя действительными числами.

Прежде чем, мы перейдем к рассмотрению комплексных чисел, дам важный совет: не пытайтесь представить комплексное число «в жизни» – это всё равно, что пытаться представить четвертое измерение в нашем трехмерном пространстве!

Новый материал (конспект в тетрадь)

Тема: «Понятие комплексного числа. Действия с комплексными числами, заданными в алгебраической форме»

1. Понятие мнимой единицы

Предположим, что существует такое число, квадрат которого равен -1. Обозначим это число буквой ***i***, тогда справедливо равенство:

$$\boxed{i^2=-1;}$$

$$\boxed{i=\sqrt{-1}}$$

Число i будем называть **мнимой единицей**, а равенство будем считать определением мнимой единицы.

Пример:

$\sqrt{-36}=\sqrt{36\cdot(-1)}=\sqrt{36}\cdot\sqrt{-1}=6i$

Пользуясь равенством $i^2 = -1$, легко определить любую целую положительную степень мнимой единицы. Имеем:

$i^3 = i^2\, i = -i,$

$i^4 = i^2\, i^2 = 1,$

$i^5 = i^4\, i = i,$

$i^6 = i^4\, i^2 = -1,$

$i^7 = i^5\, i^2 = -i,$

$i^8 = i^6\, i^2 = 1$ и т. д.

Таким образом,

- *если показатель степени числа i делится на 4, то значение степени равно 1;*

- *если при делении показателя степени на 4 в остатке получается 1, то значение степени равно i;*

- *если при делении показателя степени на 4 получается остаток 2, то значение степени равно – 1;*

- *если при делении на 4 остаток равен 3, то значение степени равно – i.*

Пользуясь этим, можно вычислять любую степень числа i.

Пример:

а) $i^{28}=1$ так как 28=4·7 (нет остатка)

б) $i^{33}=i$ так как 33=4·8+1

в) $i^{135}=-i$ так как 135=4·33+3

2. Определение комплексного числа

Комплексными числами называются числа вида $z = a + bi$, где a и b- действительные числа, а число i, определяемое равенством $i^2 = -1$, называется мнимой единицей.

Число **a** называется **действительнойчастью** комплексного числа, а число **b*i*- мнимой частью**. Комплексное число обозначается буквой **z.**

Пример: $z_1 = 2 + 3i$ (это ЕДИНОЕ ЧИСЛО, а не сложение!)

Запись комплексного числа в виде$z = a + bi$, называется **алгебраической формой записи** комплексного числа.

Два комплексных числа $z = a + bi$ и $\bar{z} = a - bi$, отличающиеся лишь знаком мнимой части, называются **сопряженными**.

3. Действия над комплексными числами

Правило сложения:

$$(a_1 + b_1 i) + (a_2 + b_2 i) = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i$$

Пример:$z_1 = 3+5i$, $z_2 = 6+3i$

$z = z_1 + z_2 = (3+5i)+(6+3i) = 3+5i+6+3i = 9+8i$(для того чтобы сложить два комплексных числа нужно сложить их действительные и мнимые части)

Правило вычитания:

$$(a_1 + b_1 i) - (a_2 + b_2 i) = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)i$$

Пример:$z_1 = 4+2i$, $z_2 = 1+5i$

$z = z_1 - z_2 = (4+2i)-(1+5i) = 4+2i - 1-5i = 3-3i$(действие аналогично сложению, единственная особенность состоит в том, что вычитаемое нужно взять в скобки, а затем – стандартно раскрыть эти скобки перед которой стоит знак минус)

Правило умножения:

$$(a_1 + b_1 i) \cdot (a_2 + b_2 i) = a_1 a_2 + a_1 b_2 i + a_2 b_1 i + b_1 b_2 i^2 =$$
$$= a_1 a_2 - b_1 b_2 + (a_1 b_2 + a_2 b_1)i$$

Пример:$z_1 = 2+5i$, $z_2 = 4+2i$

$z = z_1 \cdot z_2 = (2+5i)\cdot(4+2i) = 8+4i+20i+10i^2 = 8+24i-10 = -2+24i$ (комплексные числа перемножаются как двучлены, при этом учитывается, что $i^2 = -1$)

Правилоделения:

$$\frac{a_1 + b_1 i}{a_2 + b_2 i} = \frac{(a_1 + b_1 i)\cdot(a_2 - b_2 i)}{(a_2 + b_2 i)\cdot(a_2 - b_2 i)} = \frac{a_1 a_2 - a_1 b_2 i + a_2 b_1 i - b_1 b_2 i^2}{{a_2}^2 - (b_2 i)^2} =$$
$$= \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2 + (-a_1 b_2 + a_2 b_1)i}{{a_2}^2 + {b_2}^2}$$

Пример: $z_1 = 5+3i$, $z_2 = 2+5i$

$$\frac{5+3i}{2+5i} = \frac{(5+3i)\cdot(2-5i)}{(2+5i)\cdot(2-5i)} = \frac{10-25i+6i-15i^2}{4-25i^2} = \frac{10+15-19i}{4+25}$$

$$= \frac{25-19i}{29} = \frac{25}{29} - \frac{19}{29}i$$

(деление чисел осуществляется методом умножения знаменателя и числителя на сопряженное знаменателю выражение)

4. Решение квадратных уравнений с действительными коэффициентами

Обсудим теперь вопрос о том, как решаются квадратные уравнения в комплексных числах. Сделаем это на конкретном примере:

а) $x^2 - 6x + 13 = 0$;

Решение:

Найдем дискриминант по формуле

$D = b^2 - 4ac$.

Так как $a = 1$, $b = -6$, $c = 13$, то

$D = 36 - 4\cdot1\cdot13 = 36 - 52 = -16$;

$$\sqrt{D} = \sqrt{-16} = \sqrt{16\cdot(-1)} = 4i.$$

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{D}}{2a};\ x_2 = \frac{-b+\sqrt{D}}{2a}:$$

$$x_1 = \frac{6-4i}{2} = \frac{2(3-2i)}{2} = \mathbf{3-2}i;$$

$$x_2 = \frac{6+4i}{2} = \frac{2(3+2i)}{2} = \mathbf{3+2}i.$$

б) $9x^2 + 12x + 29 = 0$

Решение:

Здесь $a = 9$, $b = 12$, $c = 29$.

Следовательно, $D = b^2 - 4ac = 12^2 - 4\cdot9\cdot29 = 144 - 1044 = -900$,

$$\sqrt{D} = \sqrt{-900} = \sqrt{900\cdot(-1)} = 30i.$$

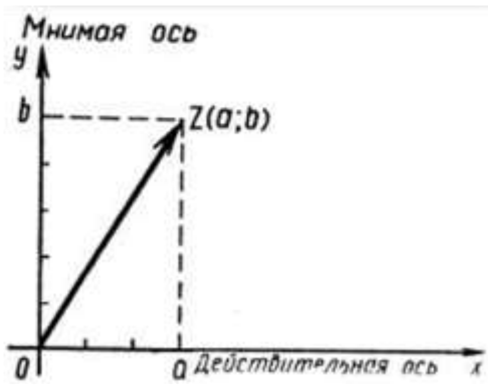
$$x_1 = \frac{-12-30i}{18} = \frac{6(-2-5i)}{18} = \frac{-2-5i}{3} = -\frac{2}{3} - \frac{5}{3}i;$$

$$x_2 = \frac{-12+30i}{18} = \frac{6(-2+5i)}{18} = \frac{-2+5i}{3} = -\frac{2}{3} + \frac{5}{3}i.$$

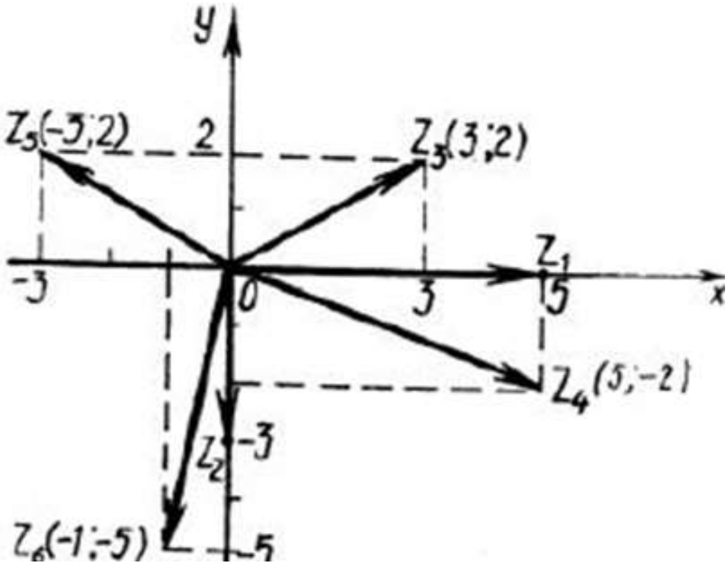
Замечание: если дискриминант квадратного уравнения отрицателен, то квадратное уравнение имеет два сопряженных комплексных корня.

5. Геометрическая интерпретация комплексного числа

Каждое комплексное число z = a + bi можно геометрически изобразить на плоскости точкой Z(a;b) или как вектор OZ с началом в точке O(0;0) и концом в точке Z (a;b)



Пример:изобразить на плоскости числа $z_1 = 5$; $z_2 = -3i$; $z_3 = 3 + 2i$; $z_4 = 5 - 2i$; $z_5 = -3 + 2i$; $z_6 = -1 - 5i$.



Конспект отправляем на электронную почту oles.udalova@yandex.ru